Problemas de sistemas de ecuaciones:

Debes intentarlos, solamente en caso de que no te salgan o te atasques miras la solución. (Dudas en clase).

Oviedo	**Septiembre 94 (bis):** *Sea la matriz A de coeficientes asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales y B la matriz de sus términos independientes:* $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ *a) Plantea algebraicamente el sistema indicando las operaciones hechas.* *b) Discute su compatibilidad e interpreta los resultados obtenidos.*
Oviedo	**Junio 95:** *Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 100, 120 y 150 ptas/kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 1.160 ptas. El peso total de la misma 9 kg. Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.* *a) Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.* *b) Resolver el problema.*
Oviedo	**Junio 97:** *En un supermercado van a poner en oferta dos marcas de detergente (A y B). El propietario consulta su libro de cuentas para ver las condiciones de una oferta anterior, encontrando la siguiente información: el número total de paquetes vendidos fueron 1.000 unidades; el precio del paquete A 500 ptas; y el importe total de la oferta 440.000 ptas. Pero en sus anotaciones no aparece reflejado claramente el precio del paquete B.* *a) Plantear un sistema para determinar el número de paquetes vendidos de cada marca. Discutir su compatibilidad.* *b) Averiguar si el precio del paquete B fue 400 o 408 ptas. ¿cuántos paquetes se vendieron?*
Oviedo	**Junio 98:** *Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera.* *Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.* *a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.* *b) Resolverlo.*

Oviedo	**Septiembre 98:** *La matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es:* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix}$ *y la de los términos independientes es:* $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. *a) Plantear las ecuaciones del sistema.* *b) Estudiar su compatibilidad en función de los valores de* a. *¿En qué casos tiene solución unica?.* *c) Resolverlo si* $a = 2$.
Oviedo	**Septiembre 99:** *En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 120 ptas/litro y el precio de la gasolina en B de 118 ptas/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son "m" ptas/litro).* *También recuerda que:* *- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 4680 ptas. al gasto en C.* *- el número de litro de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.* *- el gasto de litros en A superó al de B en 1260 ptas.* *a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de "m") para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.* *b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de "m". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?*

SOLUCIONES

<table>
<tr><td>Oviedo Septiembre 94 (bis)</td><td>

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto de matrices, y aplicando la definición de igualdad de dos matrices, obtendremos el sistema pedido: $\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ ax + (a-1)\,y = 4 \end{cases}$.

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} a & -2 & 4 \\ a & a-1 & 4 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{vmatrix} = 0 \to a^2 + a = 0; a\,(a+1) = 0 \to a_1 = 0; a_2 = -1$$

- Si $a \neq 0 \quad y \quad a \neq -1$

$|M| \neq 0 \to r(M) = r(Ma) = 2 \to S.C.D.$ (solución única).

- Si $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \to r(M) = 1$ y $r(Ma) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$. Por tanto, $S.I.$ (No soluciones).

- Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \to r(M) = 1$ y $r(Ma) = 1$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero. Por tanto, $S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

</td></tr>
<tr><td>Oviedo Junio 95</td><td>2 Kg de patatas, 3 kg. de manzanas y 4 kg. de naranjas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Oviedo
Junio 97</td><td>

Apartado a:

Si llamamos x e y al número de paquetes vendidos de las marcas A y B, respectivamente, tendremos:

$\begin{cases} x+y=1000 \\ 500x+my=440000 \end{cases}$, representando el parámetro m el precio del paquete de marca B.

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 500 & m \end{pmatrix} \qquad M_a=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 500 & m & 440000 \end{pmatrix}$

Analicemos los valores críticos haciendo:

$|M|=0 \rightarrow m-500=0 \rightarrow m=500$

$\cdot$ si $m\neq 500 \rightarrow r(M)=2$ y $r(M_a)=2 \rightarrow S.C.D.$(solución única)

$\cdot$ si $m=500 \rightarrow r(M)=1$ y $r(M_a)=2$, pues es posible encontrar en ésta, al menos, un menor complementario de orden 2 distinto de cero. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 500 & 440000 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow S.I.$ (No solución)

Apartado b:

Se trata de resolver el sistema para los valores $m=400$ y $m=408$:

$\begin{cases} x+y=1000 \\ 500x+400y=440000 \end{cases} \rightarrow \{x=400, y=600\}$

$\begin{cases} x+y=1000 \\ 500x+408y=440000 \end{cases} \rightarrow \left\{x=\frac{8000}{23}, y=\frac{15\,000}{23}\right\}$

Como el número de paquetes vendido de cada marca debe ser un número entero, el precio del paquete B tiene que haber sido 400 pesetas. En estas condiciones, se habrían vendido 400 paquetes de la marca A y 600 paquetes de la marca B.

</td></tr>
<tr><td>Oviedo
Junio 98</td><td>200 en la primera, 102 en la segunda y 50 en la tercera.</td></tr>
</table>

Oviedo
Septiembre
98

Apartado a:

El sistema asociado a las matrices dadas será: $\left\{ \begin{array}{l} x + ay = 2 \\ (a+1)x + 2y = -2 \end{array} \right.$.

El mismo sistema, expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a+1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2 - a^2 - a = 0 \rightarrow a_1 = 1 \text{ y } a_2 = -2$$

- Si $a \neq 1 \qquad y \qquad a \neq -2$

$|M| \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad r(M) = r(M_a) = 2 \qquad S.C.D.$ (solución única).

- Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Por tanto, $S.I.$ (No soluciones).

- Si $a = -2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 1$ y $r(M_a) = 1$, puesto que no es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 2 y distinto de cero.

Por tanto, $S.C.I.$ (Infinitas soluciones).

Apartado c:

Si suponemos que $a = 2$, tendremos que:

$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ 3x + 2y = -2 \end{array} \right.$, cuya solución es: $\{x = -2, y = 2\}$

Oviedo Septiembre 99	Apartado a:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de litros que ha repostado en las gasolineras A, B y C, respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} 120x + 118y = mz + 4680 \\ y = z \\ 120x = 118y + 1260 \end{cases} \text{, ordenamos: } \begin{cases} 120x + 118y - mz = 4680 \\ y - z = 0 \\ 120x - 118y = 1260 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -m \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -m & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 120 & -118 & 0 & 1260 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo $|M| = 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 120 & 118 & -m \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -14160 + 120m - 14160 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow m = 236$$

- Si $m \neq 236$

$|M| \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow S.C.D.$ (solución única).

- Si $m = 236$

$$M = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -236 \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 120 & 118 & -236 & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 120 & -118 & 0 & 1260 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 120 & 118 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; $r(Ma) = 3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 120 & 118 & 4680 \\ 0 & 1 & 0 \\ 120 & -118 & 1260 \end{vmatrix}$

Como $r(M) \neq r(M_a) \rightarrow S.I.$ (No solución).

Por esta razón, resultaría imposible haber vendido la gasolina a 236 ptas. litro en la gasolinera C.